3ο διαγώνισμα στα κύματα -Απαντήσεις

Θέμα Α: 1-δ, 2-γ,3-α, 4-γ, 5(α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Σ)

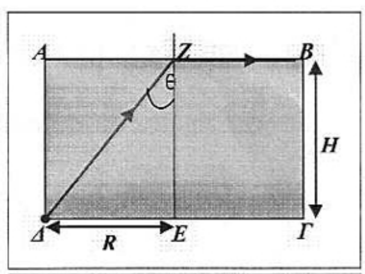
Θέμα Β:

Β.1. Σωστή η (γ). Τη στιγμή $t=t_2$ έχουμε $\upsilon_N=\upsilon_{max}=\omega A(1)$ και $\upsilon_M=\omega A\sigma\upsilon\nu(\varphi_M)\Rightarrow\ \upsilon_M=\omega A\sigma\upsilon\nu(\frac{4\pi}{3})\Rightarrow\upsilon_M=-\frac{\omega A}{2}$ ... κατά μέτρο $\upsilon_M=\frac{\upsilon_{max}}{2}$ (2).

Από (1) και (2) παίρνουμε $\boxed{\upsilon_M=\frac{\upsilon_N}{2}}$.

Β.2. Σωστή η (δ). Επειδή στο δεμένο άκρο έχουμε δεσμό, για το μήκος της χορδής ισχύει $\ell=(2\kappa+1)\frac{\lambda_1}{4}=(2\kappa+1)\frac{\upsilon}{4f_1}$. Ο $10^{ος}$ δεσμός αντιστοιχεί στην τιμή κ=9 οπότε $\ell=19\frac{\upsilon}{4f_1}$ (1). Για τριπλάσια συχνότητα ισχύει $\ell=(2\kappa'+1)\frac{\upsilon}{4.3f_1}$ (2). Από τις (1) και (2) παίρνουμε $\kappa'=28$, άρα θα έχουμε $\boxed{29\ \delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma}$ (…το κ΄ παίρνει 29 τιμές 0,1,2,3…,28).

Β.3. Α) Σωστή η σχέση (Α.1). Η γωνία θ είναι προφανώς η κρίσιμη γωνία $\theta_{crit}=\theta$, $n.\eta\mu\theta=1.\eta\mu 90^0\Rightarrow\eta\mu\theta=\frac{1}{n}$ (1). Από το σχήμα παίρνουμε $\eta\mu\theta=\frac{\Delta E}{\Delta Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{3R}{4}\right)^2}}$

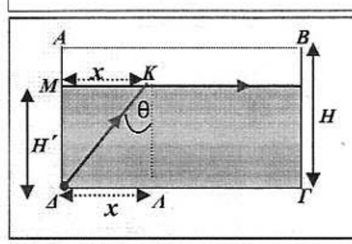


$\Rightarrow\eta\mu\theta=\frac{4}{5}=0,8$ …Από την (1) παίρνουμε $\frac{4}{5}=\frac{1}{n}\Rightarrow\boxed{n=\frac{5}{4}}$.

Β) Σωστή η σχέση (Β.3). Τώρα διάθλαση έχουμε μόνο στην περιοχή $MK=x$

$\varepsilon\varphi\theta=\frac{x}{H'}\Rightarrow\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{x}{H'}\Rightarrow\frac{0,8}{0,6}=\frac{x}{H'}\Rightarrow x=\frac{4}{3}H'$ (2),

$H'=H-0,4H=0,6H$ (3) . Από (2) και (3) παίρνουμε $x=\frac{4}{3}0,6H\Rightarrow x=0,8H=0,8.\frac{3}{4}R\Rightarrow x=0,6R$, άρα το ποσοστό μείωσης είναι $\pi=\frac{x-R}{R}100\%\Rightarrow\boxed{\pi=-40\%}$

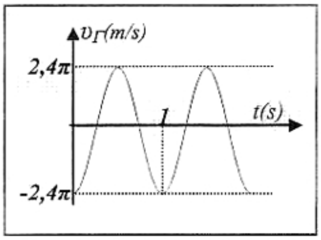


Θέμα Γ:

Α) $\lambda=\frac{\upsilon}{f}=0,4m$, $\ell=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}\xrightarrow[\kappa=7]{\delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\iota}\,8}\boxed{\ell=1,5m}$. Εξίσωση στάσιμου κύματος $\boxed{y(x,t)=0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(20\pi t)}$ (S.I).

Β) Εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Γ, $y_Γ = -A'ημ(20πt)$ (… έχει ίδια φάση με την κοιλία που είναι στην αντίστοιχη άτρακτο…).

$y_Γ = -A'ημ(20πt) \Rightarrow A' = 0,12m$, άρα οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σημείου Γ είναι $\boxed{y_Γ = -0,12ημ(20πt)}$ και $\boxed{υ_Γ = -2,4πσυν(20πt)}$ (SI).



Γ) Για να σχηματισθεί στάσιμο κύμα πρέπει

$$\ell = (2κ+1)\frac{λ}{4} = (2κ+1)\frac{υ}{4f} \Rightarrow f = (2κ+1)\frac{υ}{4\ell} \Rightarrow$$

$$f = (2κ+1)\frac{4}{4.1,5} \Rightarrow f = (2κ+1)\frac{2}{3}$$ (1) με $f < 10Hz \Rightarrow 2κ+1 < 15$.

Επίσης για να σχηματισθεί κοιλία στην θέση $x = 1m$ πρέπει $x = κ'\frac{λ}{2} = κ'\frac{υ}{2f} \Rightarrow$

$1 = κ'\frac{4}{2f} \Rightarrow f = 2κ'$ (2) με $f = 2κ' < 10Hz \Rightarrow κ' < 5$ Από (1) και (2) παίρνουμε

$\frac{f}{f} = \frac{(2κ+1)2/3}{2κ'} \Rightarrow 1 = \frac{(2κ+1)}{3κ'} \Rightarrow \frac{2κ+1}{κ'} = \frac{3}{1}$ (!!!) Επειδή (2κ+1) θετικός ακέραιος περιττός και κ΄ ακέραιος θετικός οι τιμές που μπορεί να πάρουν οι ανωτέρω ποσότητες είναι (2κ+1=3 , κ΄=1) και όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτών, έτσι ώστε η ποσότητα (2κ+1) να είναι πάντοτε θετικός ακέραιος περιττός. Επειδή όμως έχουμε και τους περιορισμούς $2κ+1 < 15$ και $κ' < 5$ τα μόνα ζευγάρια που πληρούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις είναι (2κ+1=3 , κ΄=1) και (2κ+1=9 , κ΄=3).

<u>1η περίπτωση</u>: $(2κ+1) = 3 \xrightarrow{(1)} f = 3\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f = 2Hz}$

<u>2η περίπτωση</u>: $(2κ+1) = 9 \xrightarrow{(1)} f = 9\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f = 6Hz}$

Δ) Για να σχηματισθεί στάσιμο κύμα πρέπει $\ell = N\frac{λ}{2} = N\frac{υ}{2f} \Rightarrow f = N\frac{υ}{2\ell} = N\frac{4}{3}$ (3)

με $f = N\frac{4}{3} < 20Hz \Rightarrow N < 15Hz$. Επίσης για να σχηματισθεί κοιλία σε απόσταση $OΔ = 1,25m$ πρέπει $OΔ = κ\frac{λ}{2} + \frac{λ}{4} \Rightarrow OΔ = (2κ+1)\frac{λ}{4} \Rightarrow OΔ = 1,25 = (2κ+1)\frac{υ}{4f}$

$\Rightarrow f = \frac{2κ+1}{1,25}$ (4) με $f = \frac{2κ+1}{1,25} < 20 \Rightarrow 2κ+1 < 25$. Από (3) και (4) παίρνουμε

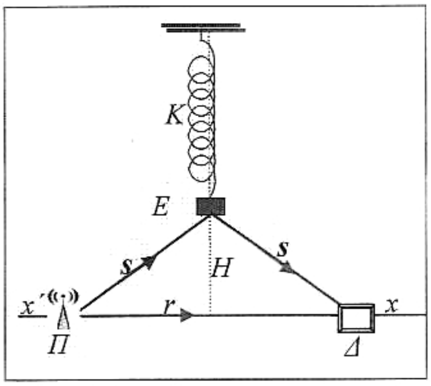
$N\frac{4}{3} = \frac{2κ+1}{1,25} \Rightarrow \frac{N}{2κ+1} = \frac{3}{5}$. Επειδή (2κ+1) θετικός ακέραιος περιττός και Ν ακέραιος θετικός οι τιμές που μπορεί να πάρουν οι ανωτέρω ποσότητες είναι (Ν=3 και 2κ+1=5) και όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτών έτσι ώστε η ποσότητα (2κ+1) να είναι πάντοτε θετικός ακέραιος περιττός. Επειδή όμως έχουμε και τους περιορισμούς $2κ+1 < 25$ και $N < 15$ τα μόνα ζευγάρια που πληρούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις είναι (Ν=3 , 2κ+1=5) και (Ν=9 , 2κ+1=15)

<u>1η περίπτωση</u>: $N = 3 \xrightarrow{(3)} f = 3\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{f = 4Hz}$

<u>1η περίπτωση</u>: $N = 9 \xrightarrow{(3)} f = 9\dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{f = 12Hz}$

Θέμα Δ:

Α) Προφανώς $(ΠΕΔ) - (ΠΔ) = \kappa\lambda \xrightarrow{\kappa=1} 2s - r = \lambda\,(1)$. Από τη γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε $s = \sqrt{H^2 + (r/2)^2} = \sqrt{2^2 + 1,5^2} \Rightarrow s = 2,5m$ και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\lambda = 2m$ και



$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8\, m/s}{2m} \Rightarrow \boxed{f = 1,5.10^8\, Hz}$$

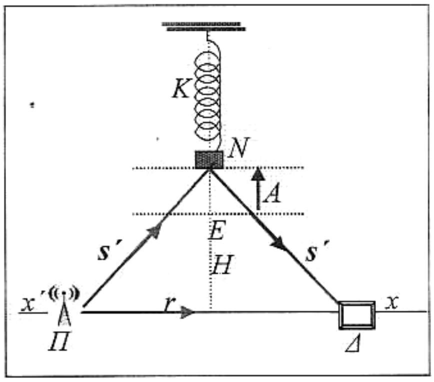
Β) Για απόσβεση στο (Δ) έχουμε $2s - r = (2\kappa + 1)\dfrac{\lambda}{2} \Rightarrow 2.2,5 - 3 = (2.0 + 1)\dfrac{\lambda'}{2} \Rightarrow$

$\lambda' = 4m$.

$$f' = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8\, m/s}{4m} \Rightarrow \boxed{f' = 0,75.10^8\, Hz}$$

Γ) $(ΠΝΔ) - (ΠΔ) = (\kappa + 1)\lambda \xrightarrow{\kappa=1} 2s' - r = 2\lambda\,(2)$.

Από τη γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε $s' = \sqrt{(H + A)^2 + (r/2)^2}$ και με αντικατάσταση στη (2) έχουμε:



$2\sqrt{(2 + A)^2 + 1,5^2} - 3 = 2.2 \Rightarrow$

$2\sqrt{(2 + A)^2 + 1,5^2} = 7 \Rightarrow 4[(2 + A)^2 + 1,5^2] = 49$

$\Rightarrow (2 + A) = \sqrt{10} \Rightarrow \boxed{A = 1,16m}$

$D = K = M\omega^2 \Rightarrow \omega = 5rad/s$

$\upsilon_0 = \omega A \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 = 5,8m/s}$

Δ) Πρέπει μεταξύ επιφάνειας Ε και πηγής Π να μην υπάρχει καμία υπερβολή ενίσχυσης … $\dfrac{\lambda}{2} > H \Rightarrow \dfrac{c}{2f} > H \Rightarrow f < \dfrac{c}{2H} \Rightarrow f < \dfrac{3.10^8\, m/s}{2.2m} \Rightarrow \boxed{f < 0,75.10^8\, Hz}$