ΘΕΜΑ 1ο

Α.(α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο (α,β) και πότε στο [α,β]

(5 μονάδες)

(β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_o,f(x_o))$

(3 μονάδες)

(γ) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(5 μονάδες)

Β.(α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(i) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_o

(2 μονάδες)

(ii) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o

(2 μονάδες)

(iii) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_o, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x_o

(2 μονάδες)

(iv) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και υπάρχει ξ ε (α,β) τέτοιο ώστε f(ξ) = 0, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (2 μονάδες)

(v) Αν η f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής ξ ε (α,β], τότε η f παίρνει πάντα στο [α,β] μια μέγιστη τιμή (2 μονάδες)

(vi) Αν η $f'(x)= 0$ για κάθε $x \in R^*$, τότε η f σταθερή στο R^* (2 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [1,2], με $f'(2) > 4$ (1)

και $f(2) - f(1) = \frac{7}{3}$ (2). Να αποδείξετε ότι:

(i) Υπάρχει α στο (1,2) ώστε $f'(\alpha) = \alpha^2$

(ii) Υπάρχει β στο (1,2) ώστε $f'(\beta) = 2\beta$

Β. Για τη συνάρτηση f ισχύει $f''(x_o) > 0$ με $x_o \in R$. Η f'' είναι συνεχής στο x_o.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε η f είναι κυρτή στο $(x_o-\delta,\ x_o+\delta)$

ΘΕΜΑ 3°

Α. Μια συνάρτηση f : R → R είναι παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη με
f(x) = - f(2-x) για κάθε x ε R. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε x ε R και η f' είναι συνεχής στο R, τότε:

(α) Να λύσετε την εξίσωση f (x) = 0 (5 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ στο σημείο, στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x'x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° (8 μονάδες)

Β. Για μια συνεχή συνάρτηση f : R → R ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 2005$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

(ι) f (0) = 0 **(ιι)** $f'(0) = 1$ (6 μονάδες)

(β) Να βρείτε το λ ε R έτσι, ώστε: $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+\lambda f^2(x)}{2x^2+f^2(x)} = 3$

(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4°

Α.Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f : R → R με f (0) = f'(0) = 0
για την οποία ισχύει: $f''(x)+[f'(x)]^2 = 2e^{-f(x)}$ για κάθε x ε R

(α) Να δείξετε ότι $f'(x)e^{f(x)} = 2x$ για κάθε x ε R (6 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln(x^2+1)$, x ε R (7 μονάδες)

(γ) Να δείξετε ότι η f δεν είναι "1-1" (3 μονάδες)

(δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{f(x)}}$ (5 μονάδες)

Β. Αν η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] με 0<α<β (1)
f (α) = f (β) = 0 (2) και $f''(x) + x f'(x) = f(x)$ για κάθε x ε [α,β] (3)
να δείξετε ότι η f έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο (α,β)

(4 μονάδες)