

$$\alpha) |z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

$$|z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow z_2 \bar{z}_2 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$$

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, είναι $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = \frac{4}{z_1 z_2}$ ή $\overline{z_1 z_2} = \frac{4}{z_1 z_2}$

$$\beta) \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = \left| \bar{z}_1 + \frac{1}{4} \bar{z}_2 \right| = \left| \overline{z_1 + \frac{1}{4} z_2} \right| = \left| z_1 + \frac{1}{4} z_2 \right|$$

$$\gamma) M(z_1)M(z_2) = |z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 1 + 2 = 3$$

$\delta_1)$ Αφού $\text{Im}(z_1 z_2) = 1$ τότε $z_1 z_2 = \rho + i$ με $\rho > 0$

Άρα $|z_1 z_2| = |\rho + i|$ ή $|z_1| |z_2| = \sqrt{\rho^2 + 1}$

$\delta_2)$ Οπότε η σχέση $|z_1| |z_2| = \sqrt{\rho^2 + 1}$ γίνεται: $1 \cdot 2 = \sqrt{\rho^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow \rho^2 + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \rho = \sqrt{3} \dots \text{αφού } \rho > 0$$

Άρα $z_1 z_2 = \sqrt{3} + i$

$$\alpha_1) \mathbf{z}^2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\bar{\mathbf{z}}$$

$$\alpha_2) \mathbf{z}^2 - \mathbf{z} + 1 = -\bar{\mathbf{z}} - \mathbf{z} + 1 = -(\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{z}) + 1 = -2\text{Re}(\mathbf{z}) + 1 = -2\frac{1}{2} + 1 = 0$$

Φυσικά, θα μπορούσαμε να λύσουμε το ερώτημα με απλές πράξεις.

$$\alpha_3) \mathbf{z}^3 + 1 = (\mathbf{z} + 1)(\mathbf{z}^2 - \mathbf{z} + 1) = (\mathbf{z} + 1) \cdot 0 = 0$$

$$\beta_1) |\mathbf{z}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\beta_2) |\mathbf{z} + \bar{\mathbf{z}}| = |2\text{Re}(\mathbf{z})| = \left|2 \cdot \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\beta_3) |\mathbf{z}^3| = |-1| = 1$$

$$\beta_4) |\mathbf{z}^2 - \mathbf{z}| = |-1| = 1 \dots \text{αφού } \mathbf{z}^2 - \mathbf{z} + 1 = 0 \text{ είναι } \mathbf{z}^2 - \mathbf{z} = -1$$

$$\beta_5) \frac{|1-z|}{|1-\bar{z}|} = \frac{|1-z|}{|1-\bar{z}|} = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\left|1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|} = \frac{\left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\gamma) \left(\frac{1}{2} - z\right)^{300} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{300} = \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{300} = \left(\frac{3}{4}\right)^{150} \cdot (i^4)^{75} = \left(\frac{3}{4}\right)^{150} \in \mathbb{R}$$

$$\delta) K = z^{300} + \frac{1}{z^{300}} = (z^3)^{100} + \frac{1}{(z^3)^{100}} = (-1)^{100} + \frac{1}{(-1)^{100}} = 1 + 1 = 2$$

$$\Lambda = z^{301} + \frac{1}{z^{301}} = (z^3)^{100} \cdot z + \frac{1}{(z^3)^{100} \cdot z} = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} \stackrel{(z^2 - z + 1 = 0)}{=} \frac{z}{z} = 1$$

$$\epsilon) |z^v - 1| \leq |z^v| + |-1| = |z|^v + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\zeta_1) |w - z| = 1$$

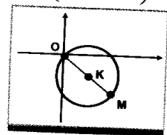
Επειδή $M(w)M(z) = 1$, τα σημεία $M(w)$ απέχουν απ' το $M(z) \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

απόσταση 1, δηλαδή τα $M(w)$ κινούνται στον $(\kappa): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

Να παρατηρήσουμε ότι ο κύκλος προφανώς αποτελεί και το γεωμετρικό τόπο.

ζ_2) Θα βρούμε την ευθεία (ϵ) που διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Είναι φανερό ότι: $(\epsilon): y - 0 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}(x - 0) \Leftrightarrow y = -x\sqrt{3}$



Η εξίσωση $(\kappa): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ γράφεται $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-x\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

μοδύναμα $x^2 - x + \frac{1}{4} + 3x^2 - 3x + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1) = 0$

Οπότε $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$... Απορρίπτεται, αφού η εικόνα του είναι το O

θέση όπου το μέτρο του w είναι Μηδέν.

ή $x = 1 \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}$ και συνεπώς $w = 1 - i\sqrt{3}$ με εικόνα το $M(w) \equiv M$

α) Αν $z_1 = z_2$, από $|z_1 - z_2| = 1$ είναι $|0| = 1$ Άτοπο.

Αν $z_1 = 0$ θα είναι και $|z_1| = |0| \Leftrightarrow 1 = 0$ Άτοπο. ...Όμοια αν ήταν $z_2 = 0$

Οπότε οι εικόνες των αριθμών δεν ταυτίζονται.

Αν τέλος οι αριθμοί $0, z_1, z_2$ είχαν εικόνες συνευθειακές, επειδή $|z_1| = |z_2| = 1$ θα έπρεπε ή $z_1 = z_2$ Άτοπο ή $z_1 = -z_2$ Άτοπο

αφού η σχέση $|z_1 - z_2| = 1$ δίνει $|z_1| = 0,5 \neq 1$

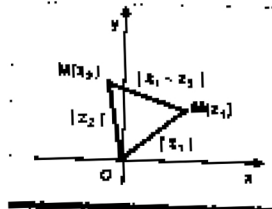
Οπότε οι εικόνες των αριθμών δεν είναι συνευθειακές.

β) Προφανώς το τρίγωνο $OM(z_1)M(z_2)$

είναι ισόπλευρο αφού $OM(z_1) = |z_1| = 1$

$$OM(z_2) = |z_2| = 1$$

$$\text{και } M(z_1)M(z_2) = |z_1 - z_2| = 1$$



$$\gamma) \text{ Είναι } \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8}i - 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i + \frac{1}{8}$$

$$= -1$$

$$\delta) \text{ Από } |z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = 1$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_1 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon) \text{ Αφού } \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2} \text{ είναι } z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2} + \kappa i$$

$$\text{και συνεπώς } |z_1\bar{z}_2| = \left| \frac{1}{2} + \kappa i \right| \quad \text{ή} \quad |z_1| |\bar{z}_2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa^2}$$

$$\text{ή } 1 \cdot 1 = \sqrt{\frac{4\kappa^2 + 1}{4}}$$

$$\text{ή } 2 = \sqrt{4\kappa^2 + 1}$$

$$\text{ή } 4\kappa^2 = 3 \text{ και τελικά } |\kappa| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } |\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2)| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\zeta) \text{ Δηλαδή θα είναι } z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Αν } z_1\bar{z}_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ τότε } \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ή } z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z_2$$

$$\dots \text{αφού } |z_2| = 1, \text{ είναι και } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

$$\text{Οπότε } z_1^{2004} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{2004} z_2^{2004} = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3 \right)^{668} z_2^{2004} = (-1)^{668} \cdot z_2^{2004}$$

Ομοια και η άλλη περίπτωση.

α) Αν για το μιγαδικό αριθμό w υποθέσουμε ότι $w = a + bi$

από $\overline{w} = w$, θα είναι $a - bi = a + bi \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0$...και συνεπώς $w \in$

β₁) Αν ήταν $z = i$

η σχέση $(z + i)^{17} + (2i)^{11}(\overline{z} - i)^6 = 0$ θα έδινε $(i + i)^{17} + (2i)^{11}(\overline{i} - i)^6 = 0$

$$\text{ή } (2i)^{17} + (2i)^{11}(-i - i)^6 = 0$$

$$\text{ή } 2^{17}i^{17} + 2^{11}i^{11}2^6i^6 = 0$$

$$\text{ή } 2^{17}i^{17} + 2^{17}i^{17} = 0$$

$$\text{ή } 2^{18}i = 0 \quad \text{Άτοπο.}$$

β₂) Είναι $|\overline{z} - i| = |\overline{\overline{z} - i}| = |z - \overline{i}| = |z + i|$

$$\text{και } |iz - 1| = |iz + i^2| = |i(z + i)| = |i| |z + i| = 1 \cdot |z + i| = |z + i|$$

β₃) Η σχέση $(z + i)^{17} + (2i)^{11} \cdot (\overline{z} - i)^6 = 0$, γίνεται $(z + i)^{17} = -2^{11}i^{11}(\overline{z} - i)^6$

$$\text{Άρα και } |(z+i)^{17}| = |-2^{11}i^{11}(\bar{z}-i)^6|$$

$$\Leftrightarrow |z+i|^{17} = |2|^{11} |i|^{11} |\bar{z}-i|^6$$

$$\Leftrightarrow |z+i|^{17} = 2^{11} \left| \overline{z+i} \right|^6$$

$$\Leftrightarrow |z+i|^{17} = 2^{11} |z+i|^6$$

Επειδή $|z+i| \neq 0$, αφού $z \neq -i$, θα είναι και $|z+i|^{11} = 2^{11}$ ή $|z+i| = 2$

Επίσης τότε θα είναι $|z+i|^2 = 2^2$ ή $(z+i)\left(\overline{z+i}\right) = 4$ ή $\bar{z}-i = \frac{4}{z+i}$

β4) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{u} = u$

$$\text{Ισοδύναμα } \overline{\left(\frac{(z+i)^2 + 4}{z+i} \right)} = \frac{(z+i)^2 + 4}{z+i}$$

$$\text{ή } \left(\frac{\overline{(z+i)^2 + 4}}{\bar{z}-i} \right) = \frac{(z+i)^2 + 4}{z+i}$$

$$\text{ή } \frac{(\bar{z}-i)^2 + 4}{\bar{z}-i} = \frac{(z+i)^2 + 4}{z+i}$$

$$\text{ή } (z+i)(\bar{z}-i)^2 + 4(z+i) = (\bar{z}-i)(z+i)^2 + 4(\bar{z}-i)$$

$$\text{ή } (z+i)(\bar{z}-i)(\bar{z}-i) + 4(z+i) = (\bar{z}-i)(z+i)(z+i) + 4(\bar{z}-i)$$

$$\text{ή } 4(\bar{z}-i) + 4(z+i) = 4(z+i) + 4(\bar{z}-i) \text{ Προφανές.}$$

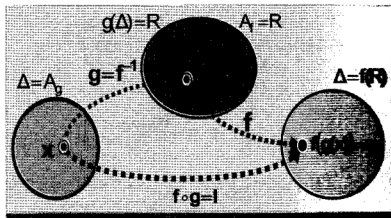
A) Έστω η 1-1 στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$
και η ορισμένη στο Δ συνάρτηση $\mathbf{g}$

Από $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \Delta (= \mathbf{f}(\mathbf{R}))$

ισοδύναμα είναι $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$

$$\text{ή } (\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})$$

$$\text{ή } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Delta$$



Δηλαδή η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι η **αντίστροφη** της συνάρτησης $\mathbf{f}$ στο σύνολο Δ

B) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $x \in \mathbb{R}$

B₁) $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, και έτσι η f είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbb{R}$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \text{ και προφανώς η } f \text{ στρέφει τα κοίλα πάνω στο } \mathbb{R}_-$$

και τα **κοίλα** κάτω στο $\mathbb{R}_+$

B₂) $f(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{-x} \frac{-1}{1+(-t)^2} d(-t) = \int_0^x \frac{-1}{1+y^2} dy = - \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = -f(x)$

...θέτουμε: $-t = y$...Μετονομάζουμε: $y = t$

Οπότε διαπιστώνουμε ότι η f είναι **περιπτή** στο $\mathbb{R}$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τον πιο κάτω τρόπο.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(-x) + f(x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων.

Οπότε $h'(x) = \left(\int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right)' = \frac{1}{1+(-x)^2} (-x)' + \frac{1}{1+x^2} = 0$

Δηλαδή είναι **σταθερή** στο $\mathbb{R}$

Συνεπώς

$h(x) \equiv h(0) = \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = 0$ και έτσι είναι $f(-x) + f(x) = 0$ ή $f(-x) = -f(x)$

B₃) $h(x) = f(\varepsilon\varphi x) - x = \int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2} dt - x$, με $x \in \Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

$$h'(x) = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} (\varepsilon\varphi x)' - 1 = \frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 = 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι **σταθερή**, με $h(x) \equiv h(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt - 0 = 0$

Δηλαδή $f(\varepsilon\varphi x) - x = 0$ ή **$f(\varepsilon\varphi x) = x$** , με $x \in \Delta$

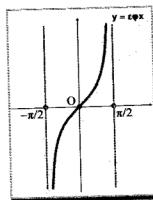
B₄) Αφού η f είναι γνήσια αύξουσα, είναι $1-1$, δηλαδή είναι **αντιστρέψιμη**.

Θέτουμε $g(x) = \varepsilon\phi x$, με $x \in \Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Το **πεδίο τιμών** της συνάρτησης $g(x) = \varepsilon\phi x$ είναι προφανώς το $\mathbb{R}$

Από $f(\varepsilon\phi x) = x$ ή $f(g(x)) = x$

διαπιστώνουμε από το πρώτο ερώτημα, ότι $f^{-1}(x) = \varepsilon\phi x$, $x \in \Delta$

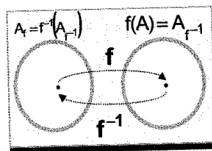


B₅) Το **πεδίο τιμών** της f είναι το **πεδίο ορισμού** της f^{-1}

και το **πεδίο ορισμού** της f είναι το **πεδίο τιμών** της f^{-1}

Η f είναι **γνήσια αύξουσα** και προφανώς **συνεχής**.

Το **πεδίο τιμών** της είναι το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$



Όμως το πεδίο τιμών $f(\mathbb{R})$ ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού Δ της f^{-1}

Δηλαδή $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

Μπορούμε να κινηθούμε και με τον πιο εξής τρόπο.

Είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\phi x = -\infty$

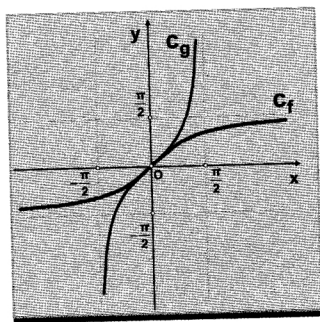
Από την σύνθεση στα όρια

προκύπτει $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\varepsilon\phi x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Θέτουμε $y = \varepsilon\phi x$

Επειδή $f(\varepsilon\phi x) = x$

θα είναι και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(\varepsilon\phi x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x = \frac{\pi}{2}$



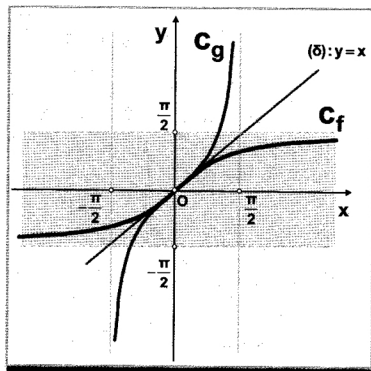
Δηλαδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ και ανάλογα διαπιστώνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

B₆) Η εφαπτόμενη της C_f

στο σημείο της **O(0,0)**

είναι η ευθεία $(\delta): y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$$\text{ή } (\delta): y = x$$



Όπως είδαμε και προηγούμενα

δίπλα είναι τα διαγράμματα των f, f^{-1}

$$\Gamma_1) I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = f(1) = f\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Το πιο πάνω ολοκλήρωμα, μπορούμε να το υπολογίσουμε και με τον παρακάτω τρόπο.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 u} (\varepsilon\varphi u)' du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu^2 u \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 du = \frac{\pi}{4}$$

Θέτουμε $x = \varepsilon\varphi u$...και αν $x=0$ είναι $u=0$ και αν $x=1$ είναι $u = \frac{\pi}{4}$

$$\Gamma_2) \text{ Είναι } I_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= -\int_0^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= -f(-1) + f(1) \dots \text{αφού η } f \text{ είναι περιττή.}$$

$$= f(1) + f(1)$$

$$= 2f(1)$$

$$= 2 \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$